2012 උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිතය I – (Pure Maths) කොටස සඳහා වු ප්‍රශ්න අංක 13 කොටස සඳහා ආදර්ශ පිළිතුරු ලබා දී ඇත.

එහි මුල් කොටස (13 a) ඉතා පහසුවෙන් විසඳිය පහත පරිදි සරලව විසඳිය හැක.

(13 b) සිසුන්ට තරමක් සංකීර්ණ ගැටළුවක් වුවත් එය විසඳන අයුරු සරලව විග්‍රහ කර ඇත. ඉදිරියේ දී අපගේ සිසු දරුවන්ගේ අවශ්‍යතාවය මත ඉතිරි ප්‍රශ්න වලටද වඩාත් නිවරදි ක්‍රමවේදයන් ඔස්සේ සරලව පිළිතුරු විග්‍රහ කිරීම බලාපොරොත්තු වෙමි.

නිලුපුල් ශ්‍රී සංකල්ප

A අකුරු විකසිත වන අපේ **Revision, Paper Class** හා **Theory Classes** සමග එකතු වන්න, ඔබත් ඉඩකඩක් වෙන්කර ගන්න, *voice : 077-2249927*

13. (*a*) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\mathbf{O}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය හා $\mathbf{O}$ යනු 2×2 ශුන්‍ය න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, $\mathbf{A}^{-1}$ සොයන්න.

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{BA}=\mathbf{B}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින්, $\mathbf{BC}=\mathbf{O}$ වන පරිදි $\mathbf{C}$ නම් නිශ්ශුන්‍ය 2×2 න්‍යාසයක් සොයන්න.

(*b*) z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.

$|z|^2=z\bar{z}$ හා $|z|\geq \operatorname{Re} z$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, ඕනෑම z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|z_1|-|z_2|\leq |z_1-z_2|$ බව පෙන්වන්න.

$|z_1+z_2|\leq |z_1|+|z_2|$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$|z-i|<\frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$|z-i|\leq \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2}\leq \arg z\leq \frac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

13. (a)

$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ලෙස ලබා දී ඇත.

පළමු කොටසෙන් $A^2-3A+2I=0$ **ලෙස පෙන්වීමට ඇත.**

$A^2-3A+2I=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ලෙස ලිවිය හැක.

$$=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ වේ.

$\therefore A^2-3A+2I=0$ වේ.

ඒනයින් A^{-1} **සෙවීමට ඇති නිසා,** ඉහත සමීකරණයේ I යන්න උක්ත කරගනිමු. එවිට,

$I=\frac{1}{2}\left(3A-A^2\right)$ වේ. එයින් අප A න්‍යාශය ඉවතට ගනිමු.

$I=A\left[\frac{1}{2}(3I-A)\right]$ ලෙස ප්‍රකාශ කල හැක.

නමුත් $I=A.A^{-1}$ බැවින් මෙම ලබාගත් ප්‍රකාශනය අනුව,

$I=A\underbrace{\left[\frac{1}{2}(3I-A)\right]}_{A^{-1}}$ විය යුතුය.

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$ වේ.

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ලෙස ලබා දී ඇත. $BA=B$ ලෙස පෙන්වීමට ඇති බැවින්, මෙහි වම් පසට B ආදේශ කරමු.

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ වේ.

$BA=\begin{pmatrix} 8-6 & 6-3 \\ 16-12 & 12-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore BA=B$ වේ.

ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් $BC=0$ වන පරිදි C න්‍යාශයක් සෙවිය යුතුය.

අප මුලින් ලබා ගත් $BA=B$ සමීකරණය පහත පරිදි සකස් කර ගනිමු.

$BA-B=0$

$B(A-I)=0$ ලෙස ලිවිය හැක. නමුත් $BC=0$ නිසා $C=A-I$ බව පහසුවෙන් තේරුම් ගත හැක.

$\therefore C=A-I=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ වේ.

13 (b)

$|Z|^2=Z\overline{Z}$ හා $|Z|>Re(Z)$ බව පෙන්වීමට ඇත.

මේ සඳහා $Z=x+iy$ ලෙස සිතමු. මෙහි $x,y\in\mathbb{R}$ වේ. එවිට $\overline{Z}=x-iy$ ද $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ද වේ.

$Z\overline{Z}=(x+iy)(x-iy)$ වේ.

$Z\overline{Z}=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$

$\therefore Z\overline{Z}=|Z|^2$ වේ.

$y\in\mathbb{R}$ සඳහා $y^2\geq 0$ වේ. (සමාන අවස්ථාව වලංගු වන්නේ, $y=0$ විටය.)

අප දෙපසටම x^2 එකතු කරමු.

$x^2+y^2\geq x^2$ වේ. මෙහි වර්ගමූලය ගත් විට,

$\sqrt{x^2+y^2}\geq|x|$ විය යුතුය. නමුත් $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $|x|\geq x$ වේ.

$\therefore\sqrt{x^2+y^2}\geq x$ විය යුතුය.

$\therefore|Z|\geq\mathrm{Re}(Z)$ වේ. (මෙහි $\mathrm{Re}(Z)$ යනු Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ තාත්වික කොටස වේ.)

ඒනයින් $|Z_1|-|Z_2|\leq|Z_1+Z_2|$ බව පෙන්වීමට ඇත.

මෙය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල මාපාංකයන් හි ත්‍රිකෝණ පිළිබඳව යෙදෙන සම්බන්ධයකි. නමුත් මෙය ඉහත සාධනය යොදාගන විසඳිය යුතු අතර, එබැවින් මෙම කොටස සිසුන්ට අපහසු වී ඇති බව පෙනේ.

අප $|Z|^2=Z\overline{Z}$ මුල් කොටසින් බව සාධනය කර ඇත. ඒඅනුව,

$|Z_1-Z_2|^2=(Z_1-Z_2)(\overline{Z_1-Z_2})$ ලෙස ප්‍රකාශ කල හැක. නමුත් $(\overline{Z_1-Z_2})=(\overline{Z_1}-\overline{Z_2})$ බැවින්,

$|Z_1-Z_2|^2=(Z_1-Z_2)(\overline{Z_1}-\overline{Z_2})$ වේ. මෙය සුළු කර බලමු.

$|Z_1 - Z_2|^2 = Z_1\overline{Z_1} + Z_2\overline{Z_2} - (Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1})$ ද,

$|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - (Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1})$ වේ.

$(Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1}) = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - |Z_1 - Z_2|^2$ ලෙය ප්‍රකාශ කල හැක.

$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = 2\,\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2})$ වේ.

$Z_1 = x_1 + iy_1$ ද $Z_2 = x_2 + iy_2$ ලෙසද ගනිමු. එවිට,

$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)$ වේ. මෙම වරහන සුළු කල විට,

$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ බව පෙනේ.

නමුත් $\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2}) = (x_1x_2 + y_1y_2)$ නිසා, ($Z_1\overline{Z_2}$ හි තාත්වික කොටස,)

$\therefore Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = 2\,\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2})$ වේ.

$2\,\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2}) = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - |Z_1 - Z_2|^2$ ------------ (A)

අප මුල් කොටසේ දී $|Z| \geq \mathrm{Re}(Z)$ බව සාධනය කර ඇත. ඒඅනුව,

$|Z_1\overline{Z_2}| \geq \mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2})$ වේ.

$2|Z_1\overline{Z_2}| \geq 2\,\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2})$,

$2|Z_1||\overline{Z_2}| \geq 2\,\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2})$ වේ. දැන් (A) සමීකරණය යොදාගත් විට,

$2|Z_1||\overline{Z_2}| \geq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - |Z_1 - Z_2|^2$ බව පෙන්විය හැක.

$|Z_1 - Z_2|^2 \geq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||\overline{Z_2}|$

$|Z_1 - Z_2|^2 \geq \left(|Z_1| - |Z_2|\right)^2$ වේ. මෙහි වර්ගමූලය ගත විට,

$|Z_1 - Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$ බව පෙන්විය හැක.

$|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$ ***බව අපෝහනය කළ යුතුව ඇත.***

මුල් සාධිත $|Z_1-Z_2| \ge |Z_1|-|Z_2|$ ප්‍රතිඵලය අනුව,

$|(Z_1+Z_2)-Z_2| \ge |Z_1+Z_2|-|Z_2|$ ලෙස ප්‍රකාශ කල හැක.

$|Z_1| \ge |Z_1+Z_2|-|Z_2|$

$|Z_1|+|Z_2| \ge |Z_1+Z_2|$ වේ.

$|Z-i| < \frac{1}{2}$ ***නම්,*** $\frac{1}{2} < |Z| < \frac{3}{2}$ ***බව පෙන්වීමට ඇත.***

මෙයද අපගේ සාධනය භාවිතා කොට පහසුවෙන් පෙන්විය හැක.

$|Z_1|-|Z_2| \le |Z_1-Z_2|$ බව අප මුලින් පෙන්වූ යෙමු. ඒඅනුව, $Z_1 = Z$ ද $Z_2 = i$ ලෙස ගත් විට,

$|Z|-|i| \le |Z-i|$ වේ. නමුත්, $|Z-i| < \frac{1}{2}$ නිසා

$|Z|-1 < \frac{1}{2}$ විය යුතුය.

$\therefore |Z| < \frac{3}{2}$ වේ.

$|Z-i| = |i-Z|$ ලෙසද ප්‍රකාශ කල හැක. එවිට, ඉහත ආකාරයටම,

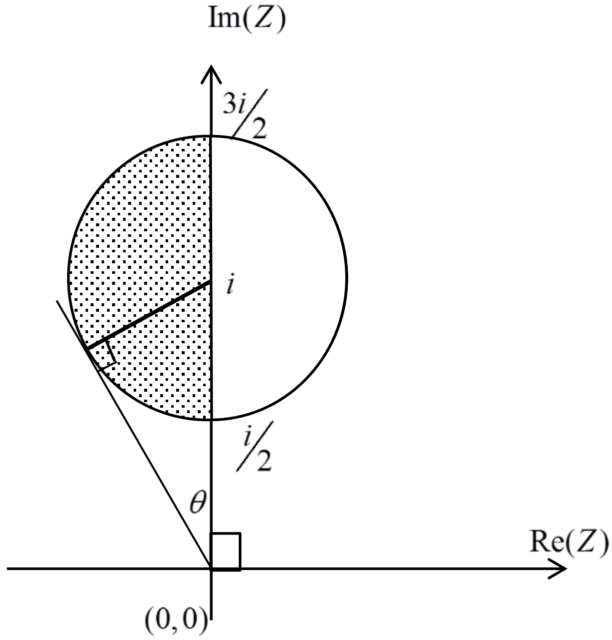
$|i|-|Z| \le |i-Z|$ වේ. නමුත්, $|Z-i| = |i-Z| < \frac{1}{2}$ නිසා,

$1-|Z| < \frac{1}{2}$ විය යුතුය.

$\therefore \frac{1}{2} < |Z|$ වේ.

$\therefore \frac{1}{2} < |Z| < \frac{3}{2}$ වේ.

$\left|Z-i\right|\le \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2}\le \arg Z\le \frac{2\pi}{3}$ වන පරිදි Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන් සටහනේ අඳුරු කළ යුතුව ඇත.



$Z=x+iy$ ලෙස ගත් විට,

$\left|Z-i\right|=\left|x+iy-i\right|=\left|x+i(y-1)\right|$ වේ.

$\left|Z-i\right|=x^2+(y-1)^2$

$\left|Z-i\right|\le \frac{1}{2}$ නිසා,

$x^2+(y-1)^2\le \frac{1}{2}$ වේ. මෙයින් Z හි පථය,

කේන්ද්‍රය $(0,1)$ ද අරය $r={}^{1}\!/_{2}$ වන වෘත්තයක් මත හෝ,

වෘත්තයක් තුළ පිහිටන බව පෙනේ.

ජ්‍යාමිතිය අනුව $\sin\theta=\frac{1}{2}$ බව කිව හැක. $\therefore \theta={}^{\pi}\!/_{6}$ වේ.

$\theta+{}^{\pi}\!/_{2}={}^{3\pi}\!/_{2}$ බැවින්,

$\frac{\pi}{2}\le \arg Z\le \frac{2\pi}{3}$ *වන විට,* ආගන් සටහනේ අඳුරු විය යුත්තේ රූපයේ පරිදි අර්ධවෘත්තාකාර කොටස වේ.

සැ: යු : කිසිදු ලිඛිත අවසරයකින් තොරව මෙහි අඩංගු දේ උපුටාගැනීම සපුරා තහනම් වේ.

A A A
Eng. Nilupul Sir Sankalpa
B.Sc. Eng. (Electrical & Electronic)
077-2249927